Travail période du 20 au 24 avril

Durant cette période, soit 4 jours selon l'emploi du temps, vous travaillerez :

- La notion de nombre premiers
- La division de nombres relatifs

Jour 1 : Nombres premiers

Rappels divisibilité :

Définition : Considérons a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.
On dit que a divise b, si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

Exemple : 12 divise-t-il 145 ? 12 divise-t-il 36 ?
Effectuons la division euclidienne de 145 par 12, on obtient que $145 = 12 \times 12 + 1$, ici le reste vaut $1 \neq 0$, donc 12 ne divise pas 145. On dit aussi que 12 n'est pas **un diviseur** de 145.
Effectuons la division euclidienne de 36 par 12, on obtient que $36 = 12 \times 3 + 0$, ici le reste vaut 0, donc 12 divise 36 autrement dit 12 est un **diviseur** de 36.

Remarque : Tout nombre entier, supérieur à 2, admet au moins deux diviseurs 1 et lui-même.
Exemple : 1 et 24 sont des diviseurs de 24. De même 1 et 13 sont des diviseurs de 13.

Remarque importante : L'égalité $45 = \mathbf{9} \times \mathbf{5}$, permet de dire que **9** et **5** sont des diviseurs de 45.
De même l'égalité $2\ 020 = \mathbf{4} \times \mathbf{505}$ affirme que **4** et **505** sont des diviseurs de 2 020.

Exercices :

1. 36 divise-t-il 897 ? 52 est-il un diviseur de 260 ?
2. Expliquez pourquoi 124, 58, 32, 446 et 2 020 sont-ils divisibles par 2 ?
3. Expliquez pourquoi 123, 201, 927 sont-ils divisibles par 3 ?

Définition :
Un nombre premier est un nombre entier positif, qui admet **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même.

Remarque importante : **1 n'est pas un nombre premier**, car effectivement 1 admet **un seul** diviseur qui est : 1.

Exemple : 7 est un nombre premier !
Pour montrer que 7 est premier, il faut montrer que les seuls diviseurs de 7 sont **1** et **7 lui-même**.
Dressons la liste des diviseurs de 7 :
Clairement 1 et 7 sont des diviseurs (d'après remarque citée précédement).
Ainsi on peut compléter la liste des diviseurs, par le « début » et par la « fin ».
On obtient alors une liste telle que : 1 ; …………………………… ; 7 **qui reste à compléter**.
A partir de là voyons si l'entier qui suit 1, c'est-à-dire 2 , divise-t-il 7 ? Non
L'entier suivant, c'est-à-dire 3, divise-t-il 7 ? Non
L'entier suivant, c'est-à-dire 4, divise-t-il 7 ? Non
Ainsi de suite…..……..jusqu'à vérifier que 6 ne divise pas 7.
On s'arrête à 6 car le dernier entier inférieur à 7.
D'où finalement les seuls diviseurs de 7 sont 1 et 7 lui-même, et donc 7 est un nombre premier.

Remarque : Cette technique peut s'avérer très longue, surtout si on considère un nombre plus grand que 7, tel que 117 par exemple. Heureusement qu'une technique différente sera mise au point par la suite.

<u>Remarque</u> : Pour montrer qu'un nombre, supérieur à 2, **n'est pas premier**, il faut montrer que le nombre en question n'admet pas exactement 2 diviseurs, mais **<u>plus</u> que 2 diviseurs**.

<u>Exemple</u> : Montrons que 206 n'est pas premier.
C'est-à-dire, montrons que 1 et 206 ne sont pas les seuls diviseurs de 206, soit montrons qu'il existe d'autres diviseurs de 206.
Or on sait que $206 = 2 \times 103$ ce qui signifie que 2 et 103 sont des diviseurs de 206 (d'après remarque donnée précédemment)
A partir de là, on compte déjà 4 diviseurs : 1, 2, 103 et 206.
Donc **il y a plus que deux diviseurs**, d'où 206 n'est pas premier.

<u>Remarque</u> : On peut utiliser certains **critères de divisibilité** pour déterminer si un nombre n'est pas premier.

<u>Exemple</u> :
1 586 finit par 6, donc 1 586 est divisible par 2, donc par conséquent 1 586 n'est pas premier (car 2 est « autre » diviseur différent de 1 et 1 586).
963 est divisible par 3 (car 9+6+3=18 et 18 divisible par 3), donc par conséquent 963 n'est pas premier (puisque 3 est un « autre » diviseur différent de 1 et 963)

<u>Exercice</u> :
1. justifier que 2, 3, 11, et 13 sont des nombres premiers
2. 6 892 est-il premier ? 575 est-il premier ? 201 est-il premier ?
3. Compléter la liste suivante des nombres premiers inférieurs à 30 :
   Liste nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; … ; … et …

Jour 2 : Nombres premiers

<u>Rappels</u> :
- Tout nombre entier, supérieur à 2, admet **au moins** deux diviseurs : **1 et lui-même**
  - Certains en **admettent plus**, ce sont les nombres **qui ne sont pas premiers**
  - Certains admettent **exactement deux diviseurs** (c'est-à-dire 1 et lui-même), ce sont les **nombres premiers**
- $48 = 2 \times 24$ d'où on comprend alors que 2 et 24 sont aussi des diviseurs de 48, soit 48 n'est donc pas premier.

<u>Exercices</u> : Montrer rapidement que 32 ; 34 ; 35 ; 813 ne sont pas premiers

<u>Problématique</u> : Comment montrer qu'un « grand » nombre est premier ?

<u>Méthode</u> : Montrer qu'un « grand » nombre est premier
- Calculer la racine carrée du nombre donné
  - <u>Remarque</u> : cette racine peut être un nombre qui n'est pas entier
- Considérer le plus grand entier inférieur à cette racine carrée
- Ecrire la liste de **tous** les nombres **premiers** qui sont **inférieurs** à la racine carrée précédemment trouvée
  - <u>Remarque</u> : Commencer la liste par le plus petit nombre premier: 2, 3, 5, 7, etc … <u>jusqu'à</u> l'entier inférieur à la racine carrée.
- Si aucun nombre premier de cette liste **ne divise** le nombre donné (pas la racine carrée !), alors le **nombre lui-même** est premier
- Sinon, si au moins un seul nombre premier de la liste divise le nombre donné, alors il n'est pas premier.

<u>Remarque</u> : On peut utiliser les critères de divisibilité afin de montrer que le nombre n'est pas premier

Exemple : Parmi les nombres suivants lesquels sont premiers ? 47 994 ; 1 251 ; 1 008 975 ; 331

Assez facilement on remarque que 47 994, 1 251 et 1 008 975 sont **respectivement** divisibles par 2 (47 994 finit par 4), par 3 (1+2+5+1=9 divisible par 9) et par 5 (1 008 975 finit par 5). Et donc par conséquent ces derniers ne sont pas premiers !

Mais qu'en est-il de 331 ? Evidemment 331 n'est pas divisible par 2, non plus par 3, non plus par 5.
Ainsi mettons en application la méthode :

- $\sqrt{331} \approx 18{,}193 \approx 18$
- Considérons le plus grand entier inférieur à 18,193 soit considérons 18.
- Notons la liste des nombres premiers inférieurs à 18 soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 (et non 19 car 19 est supérieur à 18)
- A l'aide de la calculatrice, voir si ces nombres premiers (de cette liste) **divisent 331** (et non 18 !!!!)
- Si **aucun** de ces nombres (de la liste) ne divise 331, alors 331 est **premier**, sinon (si **au moins un** nombre de la liste divise 331) alors 331 **n'est pas premier**.

Exercice :

1. 4 445 est-il premier ?
2. 283 est-il premier ?
3. 331 est-il premier ?
4. 517 est-il premier ?

Jour 3 : Nombre premier

Propriété : Tout nombre entier peut s'écrire peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Vocabulaire : Le produit défini ci-dessus s'appelle la décomposition en facteurs premiers.

Exemple : 356 est un nombre entier, on peut donc l'écrire comme le produit de facteurs premiers.
C'est-à-dire qu'il admet une décomposition en facteurs premiers (selon vocabulaire cité précédemment).

Méthode : Comment écrire la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier

- Ecrire le début de liste des nombres premiers (on se contentera d'écrire ceux inférieurs à la racine carrée)
- Parcourir la liste, et trouver le plus petit nombre premier divisant le nombre proposé
- S'il divise le nombre proposé, continuer autant de fois que possible
- Sinon, poursuivre avec un nombre premier qui suit
- Finir en écrivant la décomposition en facteurs premiers

Exemple : Décomposons 693 en facteurs premiers

- J'écris un début de la liste de nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc….
- 3 est le plus petit de la liste, **qui divise** 693.
  - D'où $693 = 3 \times 231$
  - Or on peut encore diviser par 3, puisque 231 est divisible par 3
  - soit $231 = 3 \times 77$
  - et par conséquent $693 = 3 \times 3 \times 77$ (en remplaçant 231 par 3×77)
  - 3 ne divise pas 77, donc on regarde **le suivant** dans la liste.
  - On remarque que le suivant est 7 (**car 5 ne divise pas** 77). Ainsi $77 = 7 \times 11$
- Finalement $693 = 3 \times 3 \times 7 \times 11$ et on s'arrête car 11 est premier ! $3 \times 3 \times 7 \times 11$ est la décomposition en facteurs premiers !

On récapitule :

$$\begin{aligned} 693 &= 3 \times 231 \\ &= 3 \times 3 \times 77 \\ &= 3 \times 3 \times 7 \times 11 \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Ecrire la décomposition en facteurs premiers du nombre 786
2. Ecrire la décomposition en facteurs premiers du nombre 6 300

Exercice 2 :

1. Ecrire la décomposition du nombre 4 200
2. Par lecture de la décomposition en facteurs premiers, Justin affirme que 15 est un diviseur de 4 200. A-t-il raison ? **Expliquer votre réponse seulement à partir de la lecture de sa décomposition**

Jour 4 : Division de nombres relatifs

Effectuez les tâches suivantes dans l'ordre :

1) Lire et comprendre leçon page 24 du manuel
2) Lire et comprendre correction exercices 17 et 18 page 25
3) Faire exercice 20 et 21 p 25

Remarque : La règle des signes s'appliquant à la division de deux nombres relatifs est la même que celle de la multiplication.

Ainsi :

- Technique pour déterminer le signe du quotient de deux nombres relatifs
  - **Si** les signes des nombres relatifs sont **différents**, **alors** le signe du quotient est **négatif**
  - **Sinon**, (si les signes sont les mêmes : tous deux sont positifs ou tous deux sont négatifs), alors le quotient est **positif**

Travail période 27 au 30 avril

Jour 1 : Cartes mentales

1) Réalisez une carte mentale pour la notion « **nombres premiers** »
2) Réalisez une carte mentale pour la notion « **division de nombres relatifs** »

Remarques-rappel pour l'élaboration de cartes mentales :

- La feuille est présentée sous format paysage
- L'idée principale (par exemple : **pourcentage**) est placée au centre de la feuille
- Des flèches sont tracées depuis cette idée principale vers d'autres « zones » dans lesquelles seront notées des idées secondaires (par exemple : **calculer un pourcentage** ET **utiliser un pourcentage**)
- L'écriture d'exemples est tout à fait acceptable, et peut parfois en dire plus que des textes
- La carte mentale doit vous parler, à vous-mêmes et non pas obligatoirement plaire à l'enseignant, tout en veillant bien sûr au respect des consignes.

Jour 2 : Division de nombres relatifs

1) Faire exercices 52 et 53 p 27
2) Faire exercice 57 p 29

Jour 3 : Exercices divers

1) Faire exercice 56 p 29
2) Faire exercice 43 p 132
3) Réduire la fraction suivante : $\frac{2\,100}{1\,386}$ en vous aidant de l'exemple qui suit :

Exemple : Réduisons la fraction $\frac{6\,370}{5\,460}$.

Comment faire cette réduction ?

L'idée est d'écrire le numérateur et le dénominateur comme des produits.

Or nous connaissons un produit particulier, qui est la décomposition en facteurs premiers.

Ainsi écrivons la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

Ainsi

$$\begin{aligned} 6\,370 &= 2 \times 3\,185 \\ &= 2 \times 5 \times 637 \\ &= 2 \times 5 \times 7 \times 91 \\ &= 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 5\,460 &= 2 \times 2\,730 \\ &= 2 \times 2 \times 1\,365 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 455 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 91 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \end{aligned}$$

Donc on peut écrire que $\frac{6\,370}{5\,460} = \frac{2\times5\times7\times7\times13}{2\times2\times3\times5\times7\times13}$, puis en simplifiant les mêmes facteurs on obtient

$$\frac{6\,370}{5\,460} = \frac{2\times5\times7\times7\times13}{2\times2\times3\times5\times7\times13} = \frac{7}{2\times3} = \frac{7}{6}$$

On remarque qu'on ne peut plus réduire $\frac{7}{6}$, on dit que $\frac{7}{6}$ est IRREDUCTIBLE.